IIASS
International Institute for Advanced Scientific Studies
and
Dipartimento di Fisica "E.R. Caianiello", Università degli Studi di Salerno

Premio Eduardo R. Caianiello
Prova del 22 febbraio 2019

Problema 1

L'interno del pianeta Terra ha stimolato sempre la fantasia di vari poeti e scrittori. Ad esempio già nel 1300 Dante nel suo poema "La divina Commedia" pone l'inferno nelle viscere della Terra, descrivendo in maniera puntuale il suo passaggio per il centro del pianeta.

" Io levai li occhi e credetti vedere
Lucifero com'io l'avea lasciato,
e vidili le gambe in sù tenere;
e s'io divenni allora travagliato,
la gente grossa il pensi, che non vede
qual è quel punto ch'io avea passato.
«Lèvati sù», disse 'l maestro, «in piede:
la via è lunga e 'l cammino è malvagio,
e già il sole a mezza terza riede».
Non era camminata di palagio
là 'v'eravam, ma natural burella
ch'avea mal suolo e di lume disagio.
«Prima ch'io de l'abisso mi divella,
maestro mio», diss'io quando fui dritto,
«a trarmi d'erro un poco mi favella:
ov'è la ghiaccia? e questi com'è fitto
sì sottosopra? e come, in sì poc'ora,
da sera a mane ha fatto il sol tragitto?».
Ed elli a me: «Tu imagini ancora
d'esser di là dal centro, ov'io mi presi
al pel del vermo reo che 'l mondo fóra.
Di là fosti cotanto quant'io scesi;
quand'io mi volsi, tu passasti 'l punto
al qual si traggon d'ogne parte i pesi.
E se' or sotto l'emisperio giunto
ch'è contraposto a quel che la gran secca
coverchia, e sotto 'l cui colmo consunto
fu l'uom che nacque e visse sanza pecca;
tu haï i piedi in su picciola spera
che l'altra faccia fa de la Giudecca.

Un altro scrittore che raccontò un viaggio al centro della terra fu Giulio Verne. A 150 anni dalla pubblicazione del suo romanzo, tale viaggio è ancora solo un sogno: non abbiamo gli strumenti per superare gli ostacoli fisici che s'incontrano quando si scende in profondità.
Supponendo di aver raggiunto una tecnologia che ci permetta di costruire un tunnel lungo il diametro della Terra in modo da congiungere due città A e B poste agli antipodi (fig. 1a), possiamo costruire un treno privo di motore che partendo da fermo da una delle due città può raggiungere l'altra in meno di un'ora. Tale tecnologia ci permette anche di azzerare tutte le forze d'attrito.
Assumendo che la Terra sia una sfera omogenea, il campo gravitazionale all'interno di essa può essere scritto come segue:

$$\vec{g} = -\frac{GM}{R^3}\vec{x}$$

ove la costante gravitazionale è $G = 6{,}67\ 10^{-11} N\ m^2/kg^2$, il raggio terrestre è $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m e la massa è $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg.

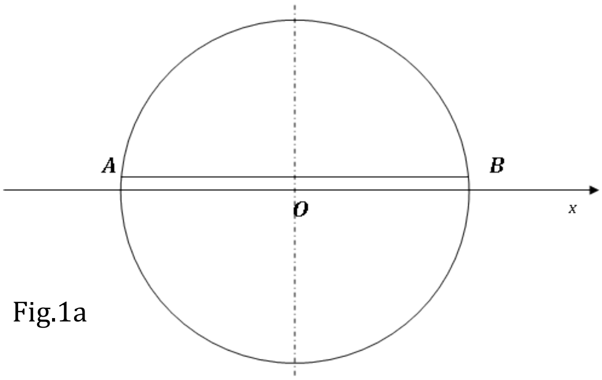


Fig.1a

Calcolare il tempo che tale treno impiegherebbe per il viaggio di sola andata, la velocità e l'accelerazione massima raggiunta.
Inoltre, sapendo che ciascun poltroncina del treno è fissata in modo da poter ruotare intorno all'asse orizzontale x, ed all'asse y perpendicolare al pavimento (vedi fig. 1b), descrivere quali rotazioni, dovranno essere programmate dal sistema di controllo, per far assumere alla poltroncina nei vari tratti del percorso una posizione corretta. Ovvero la seduta, sul passeggero, dovrà esercitare una reazione vincolare $\vec{N}$, così come rappresentata in fig. 1c. Sia la partenza che l'arrivo, al di fuori del tunnel, avviene su un binario leggermente pendente.

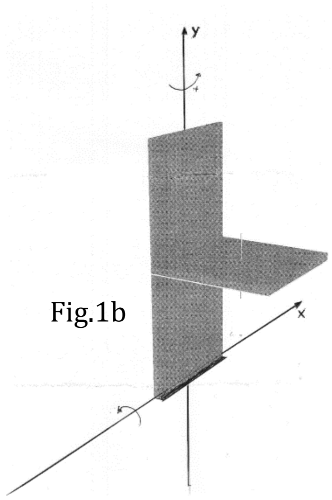
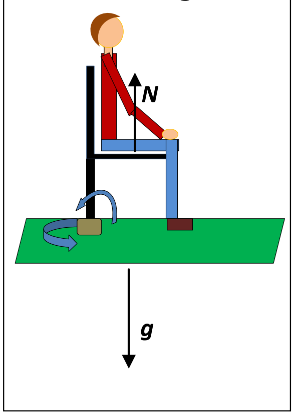


Fig.1b

Fig.1c


Problema 2

Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali è un trattato di Galileo Galilei, pubblicato a Leida - Paesi Bassi nel 1638.
È la più importante opera galileiana sulla scienza moderna, che illustra e dimostra i principi scientifici della fisica classica, in particolare della dinamica dei movimenti, e della scienza delle costruzioni.
Il Trattato si sviluppa come un dialogo fra tre personaggi, ambientato nella suggestiva cornice del rinascimentale Palazzo Sagredo sul Canal Grande a Venezia. I tre personaggi dibattono fra loro temi scientifici e rappresentano diversi punti di vista: *Salviati* interpreta il ricercatore innovatore e progressista, *Simplicio* rappresenta il dotto accademico ancorato alla tradizione ed infine *Sagredo* cerca di mediare fra questi due opposti orientamenti, interessandosi anche agli aspetti tecnici ed economici delle nuove scienze Il Dialogo avviene a Venezia in una settimana ed è diviso in sei giornate.

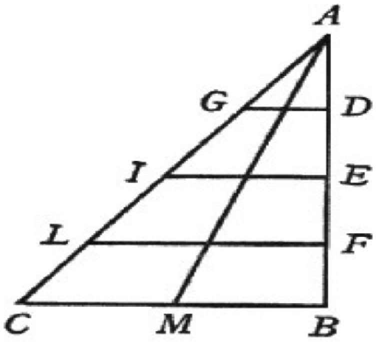
Vogliamo qui illustrare alcuni teoremi della **terza giornata** che tratta i principi della dinamica per il moto rettilineo uniforme e per il moto uniformemente accelerato, dai quali vengono dedotte le *equazioni del movimento* nella *caduta dei gravi*.

Si considerino i seguenti teoremi:

TEOREMA 2.
Se un mobile scende, a partire dalla quiete, con moto uniformemente accelerato, gli spazi percorsi da esso S_1 , S_2 in tempi qualsiasi t_1, t_2 stanno tra di loro come i rispettivi quadrati dei tempi.

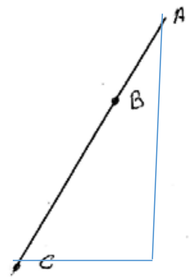
$$S_1 : S_2 = t_1^2 : t_2^2.$$

COROLLARIO
Se si prendono, a partire dall'inizio del moto, due spazi qualsiasi percorsi S_1 , S_2 nei tempi qualsiasi, i rispettivi tempi t_1, t_2 staranno tra di loro come uno dei due spazi sta al medio proporzionale tra i due spazi dati.



$$t_1 : \ t_2 \ = S_1 \ : \ \sqrt{S_1 S_2}$$

TEOREMA 3.
Se un medesimo mobile si muove, a partire dalla quiete, su un piano inclinato AC e lungo una perpendicolare AB, che abbiano eguale altezza, i tempi dei moti t_{AC} e t_{AB} staranno tra di loro come le lunghezze del piano e della perpendicolare, ossia:

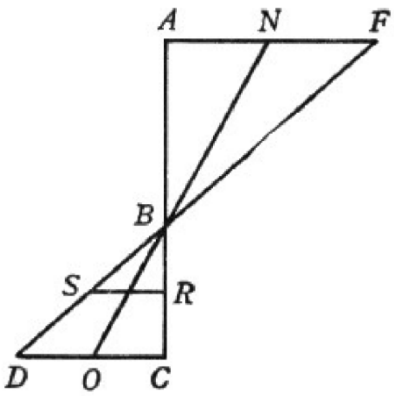


$$t_{AC} : t_{AB} = AC : AB$$

TEOREMA 11
Se il piano, sul quale si svolge il moto a partire dalla quiete, viene diviso in un modo qualsiasi, il tempo del moto lungo il primo tratto t_{AB} sta al tempo del motot_{BC} lungo il tratto successivo, come quel medesimo primo tratto AB sta all'eccesso che, su di esso, ha la media proporzionale tra l'intero piano e il suo primo tratto.

$$t_{AB} : t_{BC} = AB : \sqrt{AC \cdot AB} - AB$$

Attraverso l'uso dei teoremi e dei corollari elencati si dimostri il TEOREMA 12.
Se una perpendicolare (AC) e un piano comunque inclinato (FD) si intersecano tra di loro tra due medesime linee orizzontali (AF; DC), e se si prendono le medie proporzionali tra ciascuno di essi e la rispettiva parte compresa tra il punto comune di intersezione e la linea orizzontale superiore (M_{AC}, M_{DF}), il tempo del moto lungo la perpendicolare t_{AC} starà al tempo del moto [complessivo] lungo la parte superiore della perpendicolare t_{AB} e poi lungo la parte inferiore del piano secante t_{BD}, nella medesima proporzione che l'intera lunghezza della perpendicolare ha alla linea composta della media proporzionale presa sulla perpendicolare, e dell'eccesso dell'intero piano inclinato sulla propria media proporzionale.



Ip. $M_{AC} = \sqrt{AC \cdot AB}$; $M_{DF} = \sqrt{DF \cdot BF}$

Th : $t_{AC} : t_{AB} + t_{BD} = AC : M_{AC} + DF - M_{DF}$

Problem 3

A circular billiard

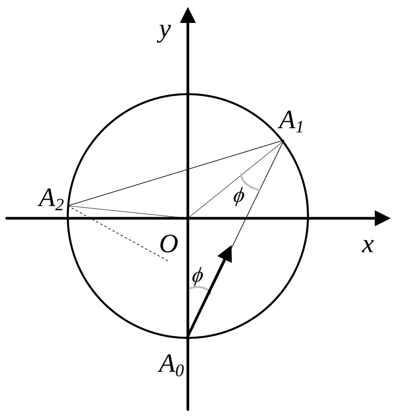


Fig. 1 A "circular billiard". A disc is launched from point A_0 toward point A_1, where it suffers a mechanical reflection. A second perfectly elastic collision with the border occurs in A_2. The rest of the trajectory of the disc follows a similar pattern at each mechanical reflection.

Billiards are fun. Imagine to play with a special circular billiard, using a disc with a very small radius, instead of the more common balls. For the sake of simplicity make the following assumptions:

i) The border of the billiard is a perfectly reflecting circular wall of radius $R = 1.0$ m;

ii) the disc moves on a smooth surface inside the circular border;

iii) at each throw, the disc is launched from the bottom of the billiard (point A_0 in fig. 1) at an angle ϕ with the respect to the y-axis.

In fig.1 a circular billiard is represented, along with a possible trajectory of the disc.

a) Show that the angular positions with respect to the x-axis, α_1 and α_2, of points A_1 and A_2, respectively, are the following:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - 2\phi, \qquad (1a)$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \gamma, \qquad (1b)$$

where $\gamma = \pi - 2\phi$.

b) Generalize the above result, by showing that the angular position with respect to the x-axis, α_n, of the collision point A_n ($n = 1, 2, 3, ...$) can be written as follows:

$$\alpha_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi - 2n\phi. \qquad (2)$$

c) By now imposing periodicity in the angular position ($\alpha_p = -\frac{\pi}{2} + 2q\pi$ for positive integers p and q), prove that the values of the angle $\phi = \phi_{p,q}$ giving periodic orbits are:

$$\phi_{p,q} = \left(\frac{p-2q}{p}\right)\frac{\pi}{2}, \qquad (3)$$

showing also that $p > 2q$.

d) For $p = 4$ and $q = 1$ draw the closed orbit of the disc and calculate the area enclosed in it.