Premio Caianiello

Anno 2019

Soluzione n.1

Applicando il secondo principio della dinamica: $\vec{F} = m\vec{a}$,
Sostituendo l'espressione della forza:

$$\vec{F} = m\vec{g} = -m\frac{GM}{R^3}\vec{x}$$

avremo:

$$-m\frac{GM}{R^3}\vec{x} = m\vec{a} \qquad => a = -\frac{GM}{R^3}x$$

Poiché l'accelerazione è direttamente proporzionale alla posizione, mediante una costante negativa, il moto della massa m sarà armonico, con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} => T = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}$$

Essendo la durata del viaggio metà del periodo avremo:

$$t = \frac{T}{2} = \pi R\sqrt{\frac{R}{GM}} = 2529s = 42{,}1\ min.$$

2) Nel moto armonico la velocità e l'accelerazione massima risultano rispettivamente:

$$v = \omega R; a = \omega^2 R =>$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = 7913\frac{m}{s}$$

$$a = \frac{GM}{R^2} = 9{,}83\ \frac{m}{s^2}$$

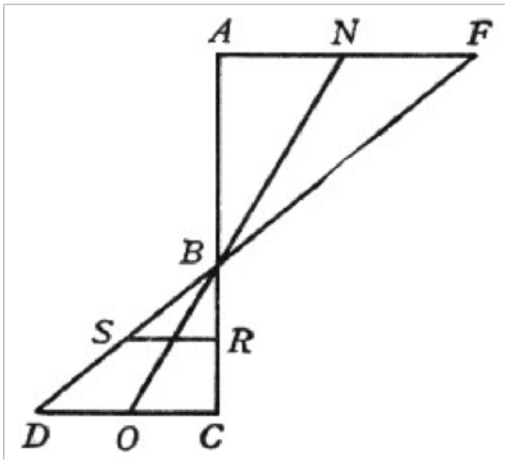
3) La poltroncina durante la partenza ruoterà intorno all'asse posto sul pavimento di 90°, in modo che lo schienale sia poggiato sul pavimento, raggiunto il centro ritorna nella posizione iniziale e ruota di 180° intorno all'asse perpendicolare al pavimento per ruotare successivamente intorno all'asse posto sul pavimento di 90° come nel caso precedente. Infine in prossimità dell'arrivo ritorna nella posizione di partenza.

Soluzione problema 2

TEOREMA 12.

Ip.

$$M_{AC} = \sqrt{AC \cdot AB};\ M_{DF} = \sqrt{DF \cdot BF}$$



Th:

$$t_{AC}: t_{AB} + t_{BD} = AC: M_{AC} + DF - M_{DF}$$

Per il corollario 2 del teorema 2 si ha :

$$t_{AB} : t_{AC} = AB: \sqrt{AC \cdot AB} => \ t_{AB} = \frac{AB \cdot t_{AC}}{\sqrt{AC \cdot AB}}$$
$$= \frac{\sqrt{AC \cdot AB}}{AC} t_{AC}$$

Applicando il teorema 11 al piano inclinato otteniamo:

$$t_{FB}: t_{BD} = BF : \ \sqrt{DF \cdot BF} - BF => t_{FD}: t_{BD} = \sqrt{DF \cdot BF} : \ \sqrt{DF \cdot BF} - BF$$

$$\frac{t_{BD}}{t_{FD}} = \frac{\sqrt{DF \cdot BF} - BF}{\sqrt{DF \cdot BF}} => t_{BD} = \frac{DF - \sqrt{DF \cdot BF}}{DF}\ t_{FD}$$

Dal teorema 3 si ha :

$$\frac{t_{FD}}{t_{AC}} = \frac{FD}{AC} => t_{FD} = \frac{FD}{AC}\ t_{AC} =>$$

$$t_{BD} = \frac{DF - \sqrt{DF \cdot BF}}{AC} t_{AC}$$

Eseguendo il rapporto

$$\frac{t_{AC}}{t_{AB} + t_{BD}} = \frac{t_{AC}}{\frac{\sqrt{AC \cdot AB}}{AC} t_{AC} + \frac{DF - \sqrt{DF \cdot BF}}{AC} t_{AC}} = \frac{AC}{DF + \sqrt{AC \cdot AB} - \sqrt{DF \cdot BF}} =>$$

$$\boldsymbol{t_{AC} :\ t_{AB} + t_{BD} = AC :\ DF + \sqrt{AC \cdot AB} - \sqrt{DF \cdot BF}}$$

c.v.d.

A circular billiard: solution

a) We first notice, from fig. 1, that the angle $\widehat{A_0OA_1} = \gamma$ is the supplementary of 2ϕ . Therefore, we may write:

$$\gamma = \pi - 2\phi. \qquad \text{(S1)}$$

In this way, we obtain:

$$\alpha_1 = \gamma - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\phi, \qquad \text{(S2)}$$

and

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \gamma, \text{ being } \widehat{A_1OA_2} = \gamma. \qquad \text{(S3)}$$

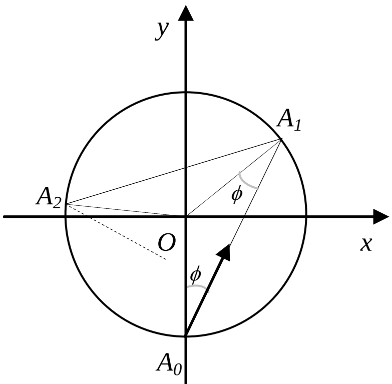


Fig. 1 The "circular billiard".

b) By now generalizing the above result, we may argue that $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\gamma$. Therefore, by (S1) and (S2), we have:

$$\alpha_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi - 2n\phi. \qquad \text{(S4)}$$

c) By now imposing periodicity in the angular position, we write:

$$\alpha_p = \left(p - \frac{1}{2}\right)\pi - 2p\phi_{p,q} = 2q\pi. \qquad \text{(S5)}$$

Therefore:

$$\phi_{p,q} = \left(\frac{p-2q}{p}\right)\frac{\pi}{2}. \qquad \text{(S6)}$$

Moreover, in order to have $0 < \phi_{p,q} < \frac{\pi}{2}$, we need to set $p > 2q$.

a) For $p = 4$ and $= 1$, $\phi_{4,1} = \frac{\pi}{4}$ and the closed orbit is a square of side $l = \sqrt{2}R$ of area $A = 2R^2$.

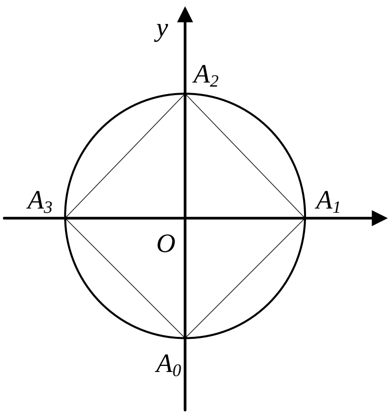


Fig. 1 The throw of the disc with $\phi_{4,1} = \frac{\pi}{4}$ gives a closed square orbit.