Soluzione Premio "E.R.Caianiello" 16/2/2018

Problema n.1

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow s = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ;\ t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Sostituendo le soluzioni nell'equazione si ottengono le seguenti relazioni

$$s^2 = s + 1\,;t^2 = t + 1$$

Per dimostrare la richiesta del problema si ricorre al principio d'induzione

$$F(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

Assunto che $\forall k \leq n,\ F(k) = \frac{s^k - t^k}{\sqrt{5}}$ dimostrare che

$$F(n+1) = \frac{s^{n+1} - t^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

Poiché

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1) = \frac{s^n - t^n}{\sqrt{5}} + \frac{s^{n-1} - t^{n-1}}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$F(n+1) = \frac{(s^n + s^{n-1}) - (t^n + t^{n-1})}{\sqrt{5}} = \frac{s^{n-1}(s+1) - t^{n-1}(t+1)}{\sqrt{5}}$$

$$F(n+1) = \frac{s^{n-1}s^2 - t^{n-1}t^2}{\sqrt{5}} = \frac{s^{n+1} - t^{n+1}}{\sqrt{5}} \quad c.v.d.$$

2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{s^{n+1} - t^{n+1}}{s^n - t^n} = \frac{s^{n+1}\left(1 - \left(\frac{t}{s}\right)^{n+1}\right)}{s^n\left(1 - \left(\frac{t}{s}\right)^{n}\right)} = \frac{s\left(1 - \left(\frac{t}{s}\right)^{n+1}\right)}{\left(1 - \left(\frac{t}{s}\right)^{n}\right)}$$

Poiché il rapporto t/s < 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = s \qquad c.v.d.$$

Problema n.2

Al tempo t =0 P=T , al tempo t=t_1 la circonferenza interna coincide con la maggiore in un punto R.

Poiché tale circonferenza rotola senza strisciare su quella di raggio 2R avremo che l'arco

$$\widehat{RP} = \widehat{RT}. \qquad 1)$$

Indicando con 2α l'angolo al centro che sottende l'arco $\widehat{RP}$ si ha $\widehat{RP} = 2\alpha R$. L'angolo $R\hat{O}P$ per un noto teorema di geometria euclidea (dato un arco di circonferenza, l'angolo alla circonferenza che insiste su tale arco è metà dell'angolo al centro individuato da tale arco), sarà uguale ad α.

Indicando con β l'angolo al centro della circonferenza maggiore sotteso all'arco $\widehat{RT}$ si ha $\widehat{RT} = \beta 2R$.

Dalla relazione 1) avremo $2\alpha R = \beta 2R \Rightarrow \alpha = \beta$.

Poichè i segmenti OP e OT formano lo stesso angolo con OR il punto P risulta allineato con T, quindi durante la rotazione della circonferenza interna esso si sposta lungo l'asse y.

Essendo il triangolo OPR rettangolo rettangolo perché inscritto in una semicirconferenza si ha :

OP = ORcosα =2Rcosα => y = 2Rcosα se l'angolo è descritto con velocità angolare ω avremo:

$$y = 2R\cos\omega t$$

$$x=0$$

In pratica, il moto di rotolamento della circonferenza interna determina il moto rettilineo armonico di ogni suo punto.

The kinematic fountain (SOLUTION n.3)

a) Let us start by writing the parametric equations for the position of a particle in the k-th water stream as follows:

$$x(t) = v_0 \cos\theta_k \, t, \qquad \text{(1a)}$$

$$y(t) = h + v_0 \sin\theta_k \, t - \tfrac{1}{2} g t^2. \qquad \text{(1b)}$$

By solving for t in (1a), we have:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta_k}. \qquad \text{(2)}$$

By substituting (2) into (1b), we may write:

$$y = h + \tan\theta_k \, x - \frac{g}{2\, v_0^2 \cos^2\theta_k} \, x^2. \qquad \text{(3)}$$

Recalling now that $\frac{1}{\cos^2\theta_k} = (1 + \tan^2\theta_k)$, we obtain:

$$y = h + \tan\theta_k \, x - \frac{g}{2\, v_0^2} (1 + \tan^2\theta_k) \, x^2. \qquad \text{(4)}$$

b) In order to find the maximum heights H_k $(k = 1, 2, 3)$ reached by the three water streams, consider Eq. (4) and set $y' = 0$, so that:

$$\tan\theta_k - \frac{g}{v_0^2}(1 + \tan^2\theta_k)\,x = 0. \qquad (5)$$

Solving for x in (5) and substituting the result in (4) we find:

$$H_k = h + \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta_k. \qquad (6)$$

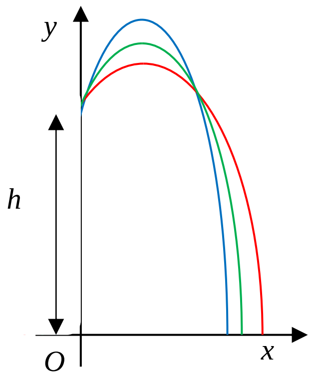

Fig. 1 Choice of axes in representing the trajectories of the water streams. Notice that all water streams have been rotated in such a way that their trajectories can be shown in a single Oxy coordinate system.

c) By setting to zero the expression for y in Eq. (4) and by rearranging terms, we write:

$$x^2 - \frac{2v_0^2}{g}\frac{\tan\theta_k}{1+\tan^2\theta_k}x - \frac{2v_0^2}{g}\frac{h}{1+\tan^2\theta_k} = 0. \qquad (7)$$

By solving the second-degree algebraic equation above and by retaining only the positive root, we have:

$$d_k = \frac{v_0^2}{g}\sin\theta_k\cos\theta_k\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2\sin^2\theta_k}}\right). \qquad (8)$$

d) Let us now insert $x = d_{max}$ and $y = 0$ in Eq. (4). In this way, we obtain

$$t^2 - \frac{2\,v_0^2}{g\,d_{max}}t + 1 - \frac{2\,v_0^2 h}{g\,d_{max}^2} = 0, \qquad (9)$$

where $t = \tan\theta^*$

e) Let us now solve Eq. (9), by excluding the possibility of two solutions for the optimum angle θ^*. Therefore, by setting the discriminant of the second-degree algebraic equation (9) equal to zero, we write:

$$\frac{v_0^2}{g^2 d_{max}^2}(v_0^2 + 2gh) = 1, \qquad (10)$$

By now defining $v_f = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ and by solving for d_{max} in (10), we have:

$$d_{max} = \frac{v_0\,v_f}{g}. \qquad (11)$$

f) In order to determine the optimum angle θ^* we find the single solution of Eq. (9) to be:

$$\tan\theta^* = \frac{v_0^2}{g\,d_{max}}, \qquad (12)$$

where d_{max} is given by Eq. (11). Therefore, by substituting Eq. (11) into Eq. (12), we finally find:

$$\theta^* = \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{v_f}\right).$$