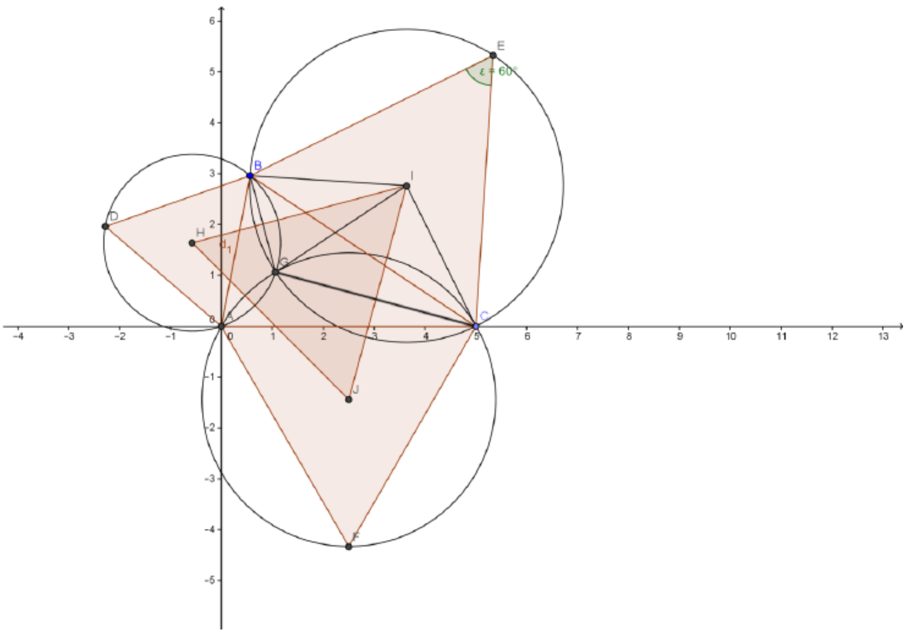
Proposta di soluzione

Problema n°1

Detto S l'importo del premio, la somma S+1 darà un importo divisibile per 15, 14, 13 …..2,1. quindi sarà il m.c.m. di tali numeri, S+1 = 360360.
Pertanto l'importo del premio risulta di S = 360360 -1 = € 360.359

Problema n°2



Si taccino le tre circonferenze circoscritte ai tre triangoli equilateri. Esse si incontrano in due punti B e G. La congiungente i due centri HI è perpendicolare alla corda AK e la congiungente i due centri IJ è perpendicolare alla corda GC. Essendo BG e GC due corde della circonferenza circoscritta al triangolo BCE, vale che l'angolo GIH è la metà dell'angolo GIB ed analogamente l'angolo GIJ è la metà dell'angolo GIC. Di conseguenza l'angolo HIJ è la metà dell'angolo BIC, che essendo un angolo al centro misura per costruzione 120°. Ne segue che l'angolo HIJ misura 60°. Analoghe considerazioni per gli angoli in H e in J.

Problema n°3

Le soluzioni sono abbastanza immediate per i punti *a*), *b*), e *c*). Infatti, per *a*) e *b*) si tratta semplicemente di un semplice calcolo, ottenendo: *a*) P_B = 521 W e *b*) P_0 = 454 W. Nel punto *c*) si deve semplicemente notare che $P_{ABS} = P_B - P_0$ = 67 W. Forse il calcolo relativamente meno semplice è quello dell'ultimo punto, dove si deve porre $P_A = P_B$, trovando T_A = 300 K.

Problema n°4

1) Determiniamo il raggio dell'orbita geostazionaria:

$$\omega^2 R_g = \frac{GM}{R_g^2} => R^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2} => R_g = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24} \cdot 86400^2}{4 \cdot \pi^2}}$$

$\rightarrow \quad R_g = 42260\ km$

Noto il raggio dell'orbita, è possibile ricavare la velocità della stazione in tale orbita

$$\boldsymbol{V_g} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 42260}{24} = \mathbf{11058}\,\frac{\boldsymbol{km}}{\boldsymbol{h}}$$

2) L'energia totale in ciascuna orbita risulta:

$$\boldsymbol{E_i} = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24} \cdot 45 \cdot 10^4}{2(6380 + 430) \cdot 10^3} = \mathbf{-13 \cdot 10^{12}}\boldsymbol{J}$$

$$\boldsymbol{E_g} = -\frac{GMm}{2R_g} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24} \cdot 45 \cdot 10^4}{2 \cdot 42260 \cdot 10^3} = \mathbf{-2 \cdot 10^{12}}\boldsymbol{J}$$

3) Indicando con $\boldsymbol{v}_1$ la velocità immediatamente dopo la prima accensione e $\boldsymbol{v_2}$ quella prima della seconda accensione, poiché il moto avviene sotto l'azione della forza centrale conservativa, avremo:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{R_g} \\ mv_1 r = mv_2 R_g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_2^2 - v_1^2 = 2GM\left(\frac{1}{R_g} - \frac{1}{r}\right) \\ v_2 = \frac{v_1 r}{R_g} \end{cases}$$

$$v_1^2 = \frac{2GMR_g}{r(r + R_g)} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v_1} = \sqrt{\frac{2GMR_g}{r(r + R_g)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 42260}{(6810 + 42260) \cdot 10^3 \cdot 6810}} = \mathbf{10}\ \boldsymbol{km/s}$$

$$\boldsymbol{v_2} = \frac{v_1 r}{R_g} = \frac{10^4 \cdot 6810 \cdot 10^3}{42260 \cdot 10^3} = \mathbf{1{,}6}\ \boldsymbol{km/s}$$

4) Per il teorema dell'energia cinetica:

$$L_1 = K_1 - K_i = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_i^2) = \frac{1}{2}m\left(\frac{2GMR}{r(r+R)} - \frac{GM}{r}\right) = \frac{GmM}{2r}\left(\frac{2R}{r+R} - 1\right)$$
$$L_2 = K_g - K_2 = \frac{1}{2}m(v_g^2 - v_2^2) = \frac{1}{2}m\left(\frac{GM}{R} - \frac{2GMr}{R(r+R)}\right) = \frac{GmM}{2R}\left(1 - \frac{2r}{r+R}\right)$$

$$\boldsymbol{L_t} = L_1 + L_2 = \frac{GmM}{2r}\left(\frac{2R}{r+R} - 1\right) + \frac{GmM}{2R}\left(1 - \frac{2r}{r+R}\right) = -\frac{\boldsymbol{GmM}}{\mathbf{2}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{R}} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}\right)$$

$$\boldsymbol{L_t} = L_1 + L_2 = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_g^2 - v_2^2 - v_i^2) = \frac{45 \cdot 10^4}{2}(100 + 3{,}1^2 - 1{,}6^2 - 7{,}7^2) = \mathbf{11 \cdot 10^{12}}\ \boldsymbol{J}$$

$$\boldsymbol{\Delta E} = \boldsymbol{E_g} - \boldsymbol{E_i} = (\mathbf{-2 + 13}) \cdot \mathbf{10^{12}}\ \boldsymbol{J} = \mathbf{11 \cdot 10^{12}}\ \boldsymbol{J}$$

5) Applicando la terza legge di Keplero tra l'orbita di trasferimento e quella geostazionaria avremo:

$$\frac{a^3}{T_e^2} = \frac{R_g^3}{T_g^2} \Rightarrow T_e = T_g\sqrt{\left(\frac{a}{R_g}\right)^3}$$

dove $a = \frac{r+R_g}{2}$

$$\boldsymbol{T} = \frac{T_e}{2} = \frac{T_g}{2}\sqrt{\left(\frac{r+R_g}{2R_g}\right)^3} = \frac{24}{2}\sqrt{\left(\frac{6810+42260}{84520}\right)^3} = 5{,}308\ h = \boldsymbol{5h\ 18m\ 30s}$$