Soluzioni

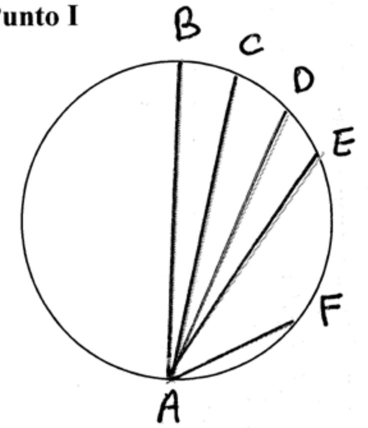
Problema n.1

L’ultimo della fila essendo preceduto da un numero dispari di studenti, vede un numero pari di cappelli di un colore ed un numero dispari dell’altro. Attribuendosi il colore dei cappelli di numero dispari, suggerisce ai suoi cinque compagni il colore dei cappelli in numero dispari. Il penultimo con tale informazione e da ciò che vede può facilmente dedurre il colore del suo cappello e così via per gli altri. In questo modo ognuno dei cinque riesce ad indovinare il colore del cappello che ha in testa.

Esempio: se l’ultimo dice bianco, ed il penultimo vede due bianchi e due neri deduce che sulla sua testa c’è il bianco, se vede un nero e tre bianchi deduce che sulla sua testa c’è il nero. Con ragionamento simile tenendo presente le risposte date dai compagni anche gli altri riescono ad indovinare facilmente il colore dei loro cappelli.

Problema n. 2

Punto I



Il tempo impiegato da un grave per percorrere il diametro AB risulta:

$$t_{AB} = \sqrt{\frac{2AB}{g}} = 2\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Il tempo impiegato a percorrere una qualunque corda che ha un estremo in A risulta:

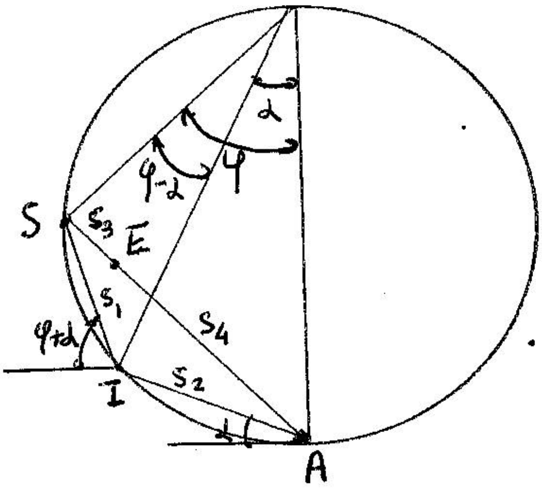
$$t_{AC} = \sqrt{\frac{2AC}{a_{II}}}$$

Il triangolo ΔABC è rettangolo poiché è inscritto in una semicirconferenza ed è simile al triangolo che si ottiene dalla scomposizione di g lungo il piano inclinato AC e la direzione perpendicolare. Pertanto varrà la seguente proporzione:

$$AB: g = AC: a_{II} => \frac{AB}{g} = \frac{AC}{a_{II}}$$

Da cui si ha : $t_{AC} = \sqrt{\frac{2AB}{g}} = 2\sqrt{\frac{R}{g}} = t_{AB}$ **c.v.d.**

Punto II



$$S_0 = 2R\sin\varphi \;;\; a_0 = g\sin\varphi\,; S_1 = 2R\sin(\varphi-\alpha) \;;$$

$$a_1 = g\sin(\varphi+\alpha); S_2 = 2R\sin\alpha$$

Sull'arco SA si determini un punto E in modo tale che il tempo impiegato da un mobile per percorrere il tratto SE= S_3 sia uguale a quello impiegato per percorrere il tratto SI=S_1.

$$S_3 = \frac{1}{2}a_0 t_3^2; S_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 \quad \text{essendo } t_1 = t_3$$

avremo $$S_3 = \frac{a_0}{a_1}S_1$$

Sia $S_4 = S_0 - S_3 = S_0 - \frac{a_0}{a_1}S_1 = S_0 - \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\alpha)}S_1 = 2R\sin\varphi\left[1 - \frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\sin(\varphi+\alpha)}\right] =$

$$S_4 = 2R\sin\varphi\frac{\sin(\varphi+\alpha)-\sin(\varphi-\alpha)}{\sin(\varphi+\alpha)} = 2R\sin\varphi\frac{2\cos\varphi\sin\alpha}{\sin(\varphi+\alpha)} = 2R\sin\alpha\frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi+\alpha)}$$

$$S_4 = \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi+\alpha)}S_2$$

$$t_4 = \frac{2S_4}{V_E+V_A} = \frac{2\,S_2\sin 2\varphi}{(V_E+V_A)\sin(\varphi+\alpha)} \qquad t_2 = \frac{2S_2}{V_I+V_A}$$

$$\frac{t_4}{t_2} = \frac{(V_I+V_A)\sin 2\varphi}{(V_E+V_A)\sin(\varphi+\alpha)}$$

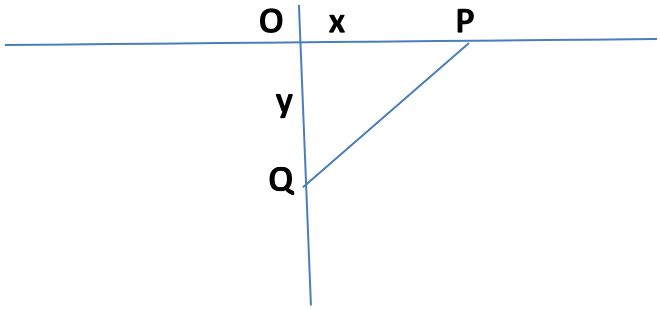
Poiché $V_I > V_E$, *essendo* $V_I = a_1 t_1$ e $V_E = a_0 t_1$ con $a_1 = g\sin(\varphi+\alpha) > a_0 = g\sin\varphi$,

e $2\varphi > \varphi+\alpha$ si avrà $t_4 > t_2$ quindi risulta:

$$\boldsymbol{t_1 + t_2 < t_3 + t_4 = t_0}$$

c.v.d.

Punto III



Il tempo impiegato dal corpo per percorrere il tratto PQ risulta:

$$t_{PQ} = \sqrt{\frac{2PQ}{a_{II}}}$$

Ove a_{II} è l'accelerazione del corpo lungo la direzione PQ.

Scomponendo l'accelerazione g in $a_{II}\ e\ a_{\perp}$ (componente parallela e perpendicolare), il triangolo delle accelerazioni è simile al **ΔOPQ** quindi avremo:

$$a_{II}: g = y: PQ \Rightarrow a_{II} = \frac{gy}{PQ} \Rightarrow t_{PQ} = \sqrt{\frac{2(PQ)^2}{gy}} \Rightarrow t_{PQ} = \sqrt{\frac{2(x^2+y^2)}{gy}}$$

$$t_{PQ} = \sqrt{\frac{2}{g}\left(\frac{x^2}{y}+y\right)}$$

Il minimo della radice si ha per x = y.

Determinazione del minimo:

Il tempo sarà minimo se è minima l'espressione in parentesi, se essa è minima anche il suo quadrato sarà minimo. Definiamo la funzione:

$$z = \left(\frac{x^2}{y}+y\right)^2 \Rightarrow \frac{x^4}{y^2}+y^2+2x^2-2x^2+2x^2 \Rightarrow \left(\frac{x^2}{y}-y\right)^2+4x^2$$

Tale funzione sarà minima quando è nullo il valore della parentesi. Da cui

$$\frac{x^2}{y} = y \Rightarrow x = y$$

c.v.d.

A tale risultato si può giungere anche ricorrendo al calcolo differenziale.

Problema n.3

A “trigonometric carousel”: solution

a) We show that, in order to find the angle θ in the “trigonometric carousel”, we need to solve the following trigonometric equation:

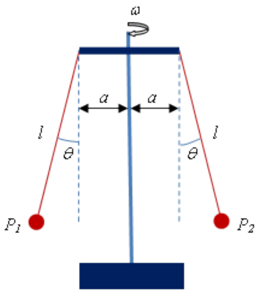


Fig. 1 A “trigonometric carousel”.

$$\tan\theta = A(\sin\theta + k), \tag{1}$$

where $A = \frac{\omega^2 l}{g}$ and $k = \frac{a}{l}$. In fact, the inextensible and massless string of length l follows a circular path with non-null radius $R = a + l\sin\theta$. As in the case of the conic pendulum, this angle can be obtained by writing Newton’s second law:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}, \tag{2}$$

where $\vec{T}$ is the tension in the string and $\vec{a} = \vec{a}_c$ is the centripetal acceleration, with modulus $a_c = \omega^2 R = \omega^2(a + l\sin\theta)$. By looking at the free-body diagram in fig. 2, we can write the following two equations, one for each component:

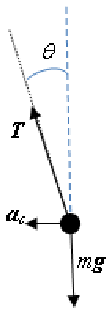


Fig. 2 Free-body diagram for the “trigonometric carousel” in fig. 1.

$$T\sin\theta = ma_c, \tag{3a}$$

$$T\cos\theta = mg. \tag{3b}$$

In this way, by dividing Eq. (3a) by Eq. (3b) and by considering the expression for a_c, we have:

$$\tan\theta = \frac{\omega^2 l\left(\frac{a}{l} + \sin\theta\right)}{g}. \tag{4}$$

Setting now $A = \frac{\omega^2 l}{g}$ and $k = \frac{a}{l}$, we obtain Eq. (1).

b) For small values of the angle θ, for which the tangent and the sine can be appropriately approximated by their arguments, Eq. (4) can be written as follows:

$$\theta \approx A(k + \theta). \tag{5}$$

Therefore, by solving for θ and by recalling the definitions of A and k, we have:

$$\theta \approx \frac{Ak}{1-A} = \frac{\omega^2 a}{g - \omega^2 l}. \tag{6}$$

c) We now discuss this result on the basis of the hypothesis made (small angles). We notice that the quantity $\frac{\omega^2 a}{g-\omega^2 l}$ has to be small. In this way, we may set:

$$\frac{\omega^2 a}{g - \omega^2 l} \ll 1. \tag{7}$$

In this way, we have that the angular frequency must satisfy the following relation:

$$\omega \ll \sqrt{\frac{g}{l+a}}. \tag{8}$$

The above expression is strikingly different from the situation described in the conic pendulum.

d) When we set $t = \tan\frac{\theta}{2}$, the trigonometric equation (1) takes the following form:

$$\frac{2t}{1-t^2} = A\left(\frac{2t}{1+t^2} + k\right). \tag{9}$$

By some algebraic manipulations, we have:

$$Ak(1-t^4) + 2At(1-t^2) - 2t(1+t^2) = 0. \tag{10}$$

For $Ak \neq 0$, we may set:

$$t^4 - \frac{2}{k}(t-t^3) + \frac{2}{Ak}(t+t^3) - 1 = 0. \tag{11}$$

From this equation we finally have:

$$t^4 + 2\,\frac{1+A}{Ak}t^3 + 2\frac{1-A}{Ak}t - 1 = 0. \tag{12}$$